

**НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ
НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩАЯ
РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ТЕ-ВОЛН
В ПЛОСКОМ НЕОДНОРОДНОМ НЕЛИНЕЙНОМ
ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ¹**

Аннотация. Цель работы: изучение математической модели распространения поверхностных электромагнитных ТЕ-волн в плоском неоднородном диэлектрическом волноводе, заполненном средой с нелинейностью, выраженной законом Керра. Материал и методы исследования: проблема сводится к исследованию нелинейного интегрального уравнения с ядром в виде функции Грина. Существование решений интегрального уравнения доказано с помощью метода сжимающих отображений. Для численного решения задачи предложены два метода: итерационный алгоритм (доказана его сходимость), а также метод, основанный на решении вспомогательной задачи Коши (метод пристрелки). Результаты: доказано существование корней дисперсионного уравнения – постоянных распространения волновода. Получены условия, когда могут распространяться k волны, указаны области локализации соответствующих постоянных распространения. Выводы: полученные результаты свидетельствуют о наличии волноводного режима распространения электромагнитных волн в нелинейной среде.

Ключевые слова: уравнения Максвелла, неоднородный волновод, задача на собственные значения, нелинейная диэлектрическая проницаемость.

D. V. Valovik, E. A. Marennikova, Yu. G. Smirnov

**A NONLINEAR TRANSMISSION EIGENVALUE PROBLEM
THAT DESCRIBES ELECTROMAGNETIC TE WAVE
PROPAGATION IN A PLANE INHOMOGENEOUS
NONLINEAR DIELECTRIC WAVEGUIDE**

Abstract. Objective of the work is to study the mathematical model of surface electromagnetic TE wave propagation in a plane inhomogeneous dielectric waveguide filled with Kerr medium. Material and methods: the physical problem is reduced to a nonlinear integral equation with Green's function as the kernel. The existence of solutions to the integral equation is proved with the help of the contracting mapping method. For numerical solutions two approaches are suggested: an iteration method (its convergence is proved); the method of Cauchy problem (a variant of the shooting method). Results: the existence of dispersion equation's roots (propagation constants of the waveguide) is proved. The authors obtain conditions suitable for k waves propagation. The regions of localization of the propagation constants are found. Conclusions: the results show that there is a nonlinear waveguiding regime for TE waves propagating in a plane inhomogeneous nonlinear waveguide.

Key words: Maxwell's equations, inhomogeneous waveguide, boundary eigenvalue problem, nonlinear permittivity.

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ, контракты № 11-07-00330-а, 12-07-97010-р_а и ФЦП «Научные и педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг., соглашение № 14.B37.21.1950.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о распространении поверхностных электромагнитных волн в нелинейном неоднородном плоском волноводе, расположенном между двумя полупространствами $x < 0$ и $x > h$ в декартовой системе координат $Oxyz$. Полупространства заполнены изотропной немагнитной средой без источников и имеют постоянную диэлектрическую проницаемость $\epsilon_1 \geq \epsilon_0$ и $\epsilon_3 \geq \epsilon_0$ соответственно, где ϵ_0 – диэлектрическая проницаемость вакуума. Считаем, что всюду $\mu = \mu_0$, где μ_0 – магнитная проницаемость вакуума.

На рис. 1 представлена геометрия задачи. Волновод неограниченно продолжается в направлениях y и z ; h – толщина волновода.

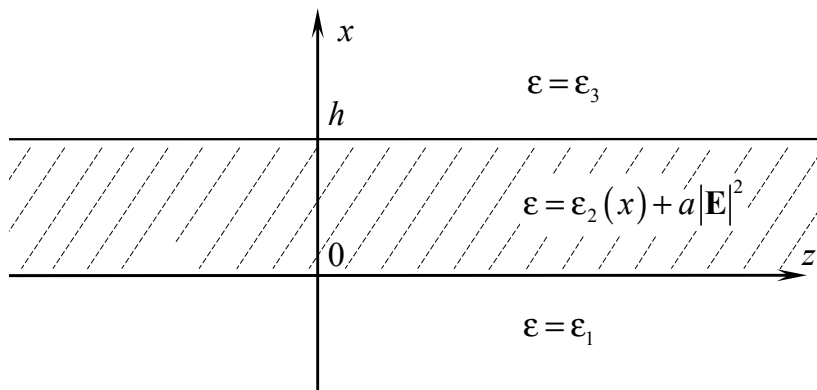


Рис. 1. Геометрия задачи

Запишем уравнения Максвелла в следующей форме [1]:

$$\text{rot } \tilde{\mathbf{H}} = \partial_t \tilde{\mathbf{D}}, \quad \text{rot } \tilde{\mathbf{E}} = -\partial_t \tilde{\mathbf{B}}, \quad (1)$$

где $\tilde{\mathbf{D}} = \epsilon \tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{B}} = \mu \tilde{\mathbf{H}}$ и $\partial_t \equiv \partial / \partial t$.

Ток проводимости $\tilde{\mathbf{j}}$ в уравнениях (1) отсутствует, так как $\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}$ образуют полное поле. Падающее поле будет введено позднее.

Таким образом из (1) получаем

$$\text{rot } \tilde{\mathbf{H}} = \partial_t (\epsilon \tilde{\mathbf{E}}), \quad \text{rot } \tilde{\mathbf{E}} = -\partial_t (\mu \tilde{\mathbf{H}}). \quad (2)$$

Электромагнитное поле $\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}$ удовлетворяет системе уравнений Максвелла (2), условию непрерывности касательных составляющих компонент поля на границах раздела сред $x = 0$, $x = h$ и условию излучения на бесконечности: электромагнитное поле экспоненциально затухает при $|x| \rightarrow \infty$ в областях $x < 0$ и $x > h$.

Электромагнитное поле гармонически зависит от времени [2]:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}(x, y, z, t) &= \mathbf{E}^+(x, y, z) \cos \omega t + \mathbf{E}^-(x, y, z) \sin \omega t, \\ \tilde{\mathbf{H}}(x, y, z, t) &= \mathbf{H}^+(x, y, z) \cos \omega t + \mathbf{H}^-(x, y, z) \sin \omega t, \end{aligned}$$

где ω – круговая частота, $\tilde{\mathbf{E}}, \mathbf{E}_+, \mathbf{E}_-, \tilde{\mathbf{H}}, \mathbf{H}_+, \mathbf{H}_-$ – действительные вектор-функции.

Легко видеть, что поля $\tilde{\mathbf{E}}, \tilde{\mathbf{H}}$ выражаются следующим образом:

$$\tilde{\mathbf{E}} = \operatorname{Re}\{\mathbf{E}e^{-i\omega t}\}, \quad \tilde{\mathbf{H}} = \operatorname{Re}\{\mathbf{H}e^{-i\omega t}\},$$

где $\mathbf{E} = \mathbf{E}^+ + i\mathbf{E}^-$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}^+ + i\mathbf{H}^-$ носят название комплексных амплитуд и $\mathbf{E} = (E_x, E_y, E_z)^T$, $\mathbf{H} = (H_x, H_y, H_z)^T$; $(\cdot)^T$ обозначает операцию транспонирования. Каждая компонента полей $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ является функцией трех пространственных переменных

Диэлектрическая проницаемость ε внутри волновода определяется по закону Керра: $\varepsilon = \varepsilon_2(x) + a|\mathbf{E}|^2$, где a – вещественная положительная постоянная и $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \hat{\varepsilon}_2 = \min_{x \in [0, h]} \varepsilon_2(x)$. Здесь $\varepsilon_2(x) \in C[0, h]$ – линейная составляющая проницаемости ε ; a – коэффициент нелинейности.

Для диэлектрической проницаемости $\varepsilon = \varepsilon_2(x) + a|\mathbf{E}|^2$ зависимость уравнений Максвелла (2) от времени такая же, как и в линейном случае (т.е. когда ε постоянная). Это позволяет доказать справедливость уравнений Максвелла (2) для комплексных амплитуд $\mathbf{E}, \mathbf{H}$. Действительно, подставляя поля $\mathbf{E}e^{-i\omega t}$, $\mathbf{H}e^{-i\omega t}$ в уравнения (2), получаем, что комплексные амплитуды $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ удовлетворяют системе уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega \varepsilon \mathbf{E}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega \mu \mathbf{H}, \quad (3)$$

условию непрерывности касательных составляющих компонент поля на границах раздела сред $x=0$, $x=h$ и условию излучения на бесконечности: электромагнитное поле экспоненциально затухает при $|x| \rightarrow \infty$ в областях $x < 0$ и $x > h$.

Разыскиваются поверхностные волны, распространяющиеся вдоль образующей волновода. Решение уравнений Максвелла ищется во всем пространстве.

2. ТЕ-волны

Рассмотрим ТЕ-поляризованные волны в гармоническом режиме

$$\mathbf{E}e^{-i\omega t} = e^{-i\omega t} (0, E_y, 0)^T, \quad \mathbf{H}e^{-i\omega t} = e^{-i\omega t} (H_x, 0, H_z)^T,$$

где $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ – комплексные амплитуды.

Подставляя эти поля в систему уравнений (3), легко убедиться, что компоненты комплексных амплитуд не зависят от переменной y . Волны, распространяющиеся вдоль оси z , гармонически зависят от z , т.е. $E_x = E_x(x)e^{i\gamma z}$, $H_x = H_x(x)e^{i\gamma z}$, $H_z = H_z(x)e^{i\gamma z}$, где γ – неизвестный спектральный параметр – постоянная распространения электромагнитной

волны. Подставляя эти компоненты в (3), после простейших преобразований получаем

$$\gamma^2 E_y(x) - E_y''(x) = \omega^2 \mu \epsilon E_y(x).$$

Введем обозначение $k^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$ и выполним нормировку в соответствии с формулами $\tilde{x} = kx$, $\frac{d}{dx} = k \frac{d}{d\tilde{x}}$, $\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{k}$, $\tilde{\epsilon}_j = \frac{\epsilon_j}{\epsilon_0}$ ($j = 1, 2, 3$), $\tilde{a} = \frac{a}{\epsilon_0}$. Обозначая $u(\tilde{x}) := E_y(\tilde{x})$ и опуская значок тильды, из последнего уравнения получаем

$$u''(x) = \gamma^2 u(x) - \epsilon u(x). \quad (4)$$

Пусть $k_1^2 := \gamma^2 - \epsilon_1$, $k_2^2(x) := \epsilon_2(x) - \gamma^2$, $k_3^2 := \gamma^2 - \epsilon_3$.

В полупространстве $x < 0$ из (4) получаем уравнение $u'' = k_1^2 u$, его общее решение имеет вид $u(x) = B_1 e^{-k_1 x} + B e^{k_1 x}$, в силу условия на бесконечности получаем

$$u(x) = B e^{k_1 x}. \quad (5)$$

В полупространстве $x > h$ из (4) получаем уравнение $u'' = k_3^2 u$, его общее решение имеет вид $u(x) = D_1 e^{k_3(x-h)} + D e^{-k_3(x-h)}$, в силу условия на бесконечности получаем

$$u(x) = D e^{-k_3(x-h)}. \quad (6)$$

В выражении (5) постоянная B считается известной; в (6) постоянная D определяется из условий сопряжения.

Внутри слоя $0 \leq x \leq h$ уравнение (4) принимает вид

$$u''(x) + k_2^2(x) u(x) = -a u^3(x). \quad (7)$$

3. Условия сопряжения и задача сопряжения

Условия сопряжения на поверхности волновода имеют вид $[E_y]_{x=0} = 0$, $[E_y]_{x=h} = 0$ и $[H_z]_{x=0} = 0$, $[H_z]_{x=h} = 0$, что дает

$$[u]_{x=0} = 0, [u]_{x=h} = 0 \text{ и } [u']_{x=0} = 0, [u']_{x=h} = 0, \quad (8)$$

где $[f]_{x=s} = \lim_{x \rightarrow s-0} f(x) - \lim_{x \rightarrow s+0} f(x)$ – скачок предельных значений функции в точке s .

Пусть $u(x)$ – решение уравнения (7). Используя условия сопряжения (8) и решения (5), (6), получаем

$$u(0) = B, u'(0) = B k_1, u(h) = D, u'(h) = -D k_3. \quad (9)$$

Определение. Число $\gamma = \tilde{\gamma}$ такое, что для заданного значения A существует не равная тождественно нулю функция $u(x) \in C^1[0, h] \cap C^2(0, h)$, которая удовлетворяет уравнению (7) и краевым условиям (9), будем называть собственным значением рассматриваемой задачи о распространении волн.

Такое определение собственного значения было дано в [3] и впоследствии нашло многочисленные применения при строгой постановке задач о распространении собственных волн в волноведущих структурах, заполненных нелинейной средой (см., например, [4–8]).

Сформулируем теперь краевую задачу на собственные значения, к которой свелась задача о распространении ТЕ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном неоднородном плоском волноводе.

Задача P: требуется отыскать собственные значения γ такие, что при заданном значении постоянной A существуют не равные тождественно нулю функции $u(x) \in C^1[0, h] \cap C^2(0, h)$, которые удовлетворяют уравнению (7) и краевым условиям (9).

Заметим, что собственное значение γ зависит от значения собственной функции на одной из границ волновода. Кроме того, обратим внимание читателей, что постановка задачи отличается от постановок классических задач на собственные значения. Постоянная B в условиях (9) неизвестна и подлежит определению вместе с собственным значением и собственной функцией.

4. Нелинейное интегральное уравнение

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение (7) и линейное уравнение

$$u'' + k_2^2 u = 0. \quad (10)$$

Перепишем последнее уравнение в операторной форме:

$$L_k u = 0, \text{ где } L_k = \frac{d^2}{dx^2} + k_2^2,$$

здесь индекс k указывает на явную зависимость оператора L_k от x , так как $k_2^2 \equiv k_2^2(x)$.

Предположим, что существует функция Грина $G_k(x, s)$ краевой задачи

$$L_k G_k = -\delta(x-s), \quad \partial_x G_k(x, s)|_{x=0} = \partial_x G_k(x, s)|_{x=h} = 0 \quad (0 < s < h), \quad (11)$$

тогда в окрестности собственного значения λ_i она может быть представлена в следующем виде (см., например, [9, 10])

$$G_k(x, s) = \frac{\Phi_i(x)\Phi_i(s)}{\lambda - \lambda_i} + G_1(x, s), \quad (12)$$

где $\lambda := \gamma^2$, $G_1(x, s)$ регулярна в окрестности точки λ_i , а $\lambda_n, \Phi_n(x)$ – полная система ортонормированных (вещественных) собственных чисел и собственных функций краевой задачи

$$\varphi_n'' + (\varepsilon_2(x) - \lambda) \varphi_n = \lambda_n \varphi_n, \quad \varphi_n'|_{x=0} = \varphi_n'|_{x=h} = 0.$$

Функция Грина существует при таких значениях параметров, когда $\lambda \neq \lambda_n$.

Запишем уравнение (7) в операторном виде:

$$L_k u + \alpha B(u) = 0, \quad B(u) = u^3. \quad (13)$$

Используя вторую формулу Грина

$$\begin{aligned} \int_0^h (v L_k u - u L_k v) dx &= \int_0^h (v u'' - u v'') dx = \\ &= v(h) u'(h) - v(0) u'(0) - u(h) v'(h) + u(0) v'(0) \end{aligned}$$

и полагая $v = G_k$ с учетом условий (11), получаем

$$\int_0^h (G_k L_k u - u L_k G_k) dx = G(h, s) u'(h) - G(0, s) u'(0). \quad (14)$$

Используя уравнение (13), получаем интегральное представление решения $u(s)$ уравнения (7) на отрезке $[0, h]$:

$$u(s) = -\alpha \int_0^h G_k(x, s) u^3(x) dx + f(s), \quad 0 \leq s \leq h, \quad (15)$$

где $f(s) = G_k(h, s) u'(h) - G_k(0, s) u'(0)$.

Введем обозначение: $F(s) = -\alpha \int_0^h G_k(x, s) u^3(x) dx + f(s)$. Предполагается, что $f \in C[0, h]$ и $\lambda \neq \lambda_n$.

Используя результаты работ [11–13], можно показать, что имеют место следующие утверждение и теоремы.

Утверждение 1. Если $\|f\| \leq \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3\|N\|}}$, то уравнение (15) имеет по крайней мере одно решение и $\|u\| \leq r^*$, где

$$Nw = \int_0^h N(x, s) w(x) dx, \quad N(x, s) = -\alpha G_k(x, s), \quad \|N\| = \max_{s \in [0, h]} \int_0^h |N(x, s)| dx$$

и

$$r^* = -2 \sqrt{\frac{1}{3\|N\|}} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \|f\| \sqrt{\|N\|} \right) + \frac{2\pi}{3} \right)$$

есть корень уравнения $\|N\| r^3 + \|f\| = r$.

Теорема 1. Если $\alpha \leq A^2$, где $A = \frac{2}{3} \frac{1}{\|f\| \sqrt{3\|N_0\|}}$ и

$$\|N_0\| = \max_{0 \leq x \leq R} \int_0^R |G_k(x, s)| dx, \text{ то уравнение (15) имеет единственное решение } u,$$

являющееся непрерывной функцией:

$$u \in C[0, h], \|u\| \leq r_*,$$

где $r_* = -2 \sqrt{\frac{1}{3\|N\|}} \cos \left(\frac{1}{3} \arccos \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \|f\| \sqrt{\|N\|} \right) - \frac{2\pi}{3} \right)$ есть корень уравнения $\|N\| r^3 + \|f\| = r$.

Отметим, что $A > 0$ и не зависит от α .

В дальнейшем нам понадобится утверждение о зависимости решений интегрального уравнения (15) от параметра.

Теорема 2. Пусть ядро N и правая часть f интегрального уравнения (15) непрерывно зависят от параметра $\lambda \in \Lambda_0$, $N(x, s) \in C(\Lambda_0 \times [0, h] \times [0, h])$, $f(\lambda, s) \in C(\Lambda_0 \times [0, h])$, на некотором отрезке Λ_0 вещественной числовой оси. Пусть также

$$0 < \|f(\lambda)\| < \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt{3\|N(\lambda)\|}}. \quad (16)$$

Тогда решения $u(\lambda, x)$ уравнения (15) при $\lambda \in \Lambda_0$ существуют, единственны и непрерывно зависят от параметра λ , $u(\lambda, x) \in C(\Lambda_0 \times [0, h])$.

5. Итерационный метод

Приближенные решения u_n интегрального уравнения (15), представимого в виде $u = F(u)$, могут быть определены итерационным процессом $u_{n+1} = F(u_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$:

$$u_0 = 0, \quad u_{n+1} = -\alpha \int_0^h G_k(x, s) u_n^3 dx + f, \quad n = 0, 1, \dots \quad (17)$$

Последовательность u_n равномерно сходится к решению u уравнения (15) вследствие того, что $F(u)$ – сжимающий оператор. Известна также оценка для скорости сходимости итерационного алгоритма (17). Сформулируем эти результаты в виде следующего утверждения.

Утверждение 2. Последовательность приближенных решений u_n уравнения (15), определяемых посредством итерационного алгоритма (17), существует и сходится в норме пространства $C[0, h]$ к (единственному) точному решению и этого уравнения, и верна оценка скорости сходимости:

$\|u_n - u\| \leq \frac{q^n}{1-q} f(u_0)$, $n \rightarrow \infty$, где $q := 3Nr_*^2 < 1$ – коэффициент сжатия отображения F .

6. Дисперсионное уравнение

Из уравнения (15) при $s = 0+0$ и $s = h-0$, используя краевые условия (9), получаем

$$\begin{cases} B = \lim_{s \rightarrow 0+0} \left(-\alpha \int_0^h G_k(x, s) u^3(x) dx \right) - Dk_3 \lim_{s \rightarrow 0+0} G_k(h, s) - Bk_1 \lim_{s \rightarrow 0+0} G_k(0, s), \\ D = \lim_{s \rightarrow h-0} \left(-\alpha \int_0^h G_k(x, s) u^3(x) dx \right) - Dk_3 \lim_{s \rightarrow h-0} G_k(h, s) - Bk_1 \lim_{s \rightarrow h-0} G_k(0, s). \end{cases} \quad (18)$$

Исключая постоянную D из этой системы, получим дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned} B \left[(k_3 G_k(h, h-0) + 1)(k_1 G_k(0, 0+0) + 1) - k_1 k_3 G_k(h, 0+0) G_k(0, h-0) \right] = \\ = \alpha \left[k_3 G_k(h, 0+0) \lim_{s \rightarrow h-0} \int_0^h G_k(x, s) u^3(x) dx - \right. \\ \left. - (1 + k_3 G_k(h, h-0)) \lim_{s \rightarrow 0+0} \int_0^h G_k(x, s) u^3(x) dx \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

7. Существование решений дисперсионного уравнения

Перепишем дисперсионное уравнение (19) в следующей форме:

$$Bg(\lambda) = \alpha \Phi(\lambda), \quad (20)$$

где

$$g(\lambda) = (k_3 G_k(h, h-0) + 1)(k_1 G_k(0, 0+0) + 1) - k_1 k_3 G_k(h, 0+0) G_k(0, h-0),$$

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda) = k_3 G_k(h, 0+0) \lim_{s \rightarrow h-0} \int_0^h G_k(x, s) u^3(x) dx - \\ - (1 + k_3 G_k(h, h-0)) \lim_{s \rightarrow 0+0} \int_0^h G_k(x, s) u^3(x) dx. \end{aligned}$$

Нули функции $\Delta(\lambda) \equiv Bg(\lambda) - \alpha \Phi(\lambda)$ – это значения λ , для которых существует нетривиальное решение задачи P , сформулированной ранее.

Рассмотрим вопрос о существовании решений дисперсионного уравнения для линейной задачи. Из уравнения (20) при $\alpha = 0$ получаем $g(\lambda) = 0$

(заметим, что в этом случае, как это и должно быть, собственные значения не зависят от постоянной A).

Используя (12), имеем

$$\begin{aligned} G_k(0,0;\lambda) &= -\frac{\varphi_i^2(0)}{\lambda-\lambda_i} + G_1(0,0;\lambda), & G_k(0,h;\lambda) &= -\frac{\varphi_i(0)\varphi_i(h)}{\lambda-\lambda_i} + G_1(0,h;\lambda), \\ G_k(h,h;\lambda) &= -\frac{\varphi_i^2(h)}{\lambda-\lambda_i} + G_1(h,h;\lambda), & G_k(h,0;\lambda) &= -\frac{\varphi_i(h)\varphi_i(0)}{\lambda-\lambda_i} + G_1(h,0;\lambda). \end{aligned} \quad (21)$$

Используя формулы (21) в уравнении $g(\lambda)=0$ получим

$$\begin{aligned} &\left(-k_3 \frac{\varphi_i^2(h)}{\lambda-\lambda_i} + k_3 G_1(h,h;\lambda) + 1\right) \left(-k_1 \frac{\varphi_i^2(0)}{\lambda-\lambda_i} + k_1 G_1(0,0;\lambda) + 1\right) - \\ &- k_1 k_3 \left(-\frac{\varphi_i(h)\varphi_i(0)}{\lambda-\lambda_i} + G_1(h,0;\lambda)\right) \left(-\frac{\varphi_i(0)\varphi_i(h)}{\lambda-\lambda_i} + G_1(0,h;\lambda)\right) = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получаем

$$a(\lambda) = \frac{1}{\lambda-\lambda_i} b(\lambda)$$

где

$$\begin{aligned} a(\lambda) &= k_1 k_3 \left[G_1(h,h;\lambda) G_1(0,0;\lambda) - G_1(0,h;\lambda) G_1(h,0;\lambda) \right] + \\ &+ k_1 G_1(0,0;\lambda) + k_3 G_1(h,h;\lambda) + 1, \\ b(\lambda) &= k_1 \varphi_i^2(0) \left[k_3 G_1(h,h;\lambda) + 1 \right] + k_3 \varphi_i^2(h) \left[k_1 G_1(0,0;\lambda) + 1 \right] - \\ &- k_1 k_3 \varphi_i(0) \varphi_i(h) \left[G_1(0,h;\lambda) + G_1(h,0;\lambda) \right]. \end{aligned}$$

Поскольку величины $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ остаются ограниченными, то это означает, что между двумя последовательными собственными числами λ_i и λ_{i+1} существует по крайней мере одно решение уравнения $g(\lambda)=0$.

Необходимо еще показать, что в выражении $G_k(h,h;\lambda)$ член $\varphi_i(h)$ не обращается в нуль. Это легко сделать методом от противного. Предположим, что $\varphi_i(h)=0$. Тогда рассмотрим задачу Коши для уравнения $\varphi_i'' + k_2^2 \varphi_i = \lambda_i \varphi_i$ с начальными условиями $\varphi_i|_{x=h} = \varphi_i'|_{x=h} = 0$ при $x \in [0, h]$. Из общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [14]) известно, что решение $\varphi_i(x)$ рассматриваемой задачи Коши существует и единственно при $x \in [0, h]$. Это решение при $x \in [0, h]$ совпадает с функцией $\varphi_i(x)$, участвующей в представлении (12) функции Грина. Также

известно, что решение задачи Коши для линейного уравнения с нулевыми начальными данными является тождественным нулем. А это противоречит представлению (12) функции Грина $G_k(x, s; \lambda)$ в окрестности точки $\lambda = \lambda_i$. Аналогично можно показать, что в выражении $G_k(0, 0; \lambda)$ член $\varphi_i(0)$ не обращается в нуль.

Теперь можно показать, что существуют решения уравнения $\Delta(\lambda) = 0$.

Действительно, пусть существует такое целое число $k \geq 1$, что справедливо $\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_{k-1} < \lambda_k < \varepsilon_2$, где $\varepsilon_2 = \min_{x \in [0, h]} \varepsilon_2(x)$. Выберем

достаточно малые числа $\delta_i > 0$ такие, что на объединении $\Gamma := \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i$ отрезков

$\Gamma_i := [\sqrt{\lambda_{i-1}} + \delta_{i-1}, \sqrt{\lambda_i} - \delta_i]$, $i = \overline{1, k}$, функция Грина $G_k(x, s; \lambda)$ существует и непрерывна. Кроме того, выполняется $g(\sqrt{\lambda_{i-1}} + \delta_{i-1})g(\sqrt{\lambda_i} - \delta_i) < 0$. Отсюда ясно, что величина $F(\lambda)$ ограничена. Более того, за счет выбора величины α произведение $\alpha F(\lambda)$ может быть сделано достаточно малым. Рассмотрим дисперсионное уравнение $\Phi(\lambda) = 0$. Ясно, что функция $g(\lambda)$ непрерывна и меняет знак при изменении λ от $\lambda_{i-1} + \delta_{i-1}$ до $\lambda_i - \delta_i$. Поскольку величина $F(\lambda)$ ограничена при изменении λ от $\lambda_{i-1} + \delta_{i-1}$ до $\lambda_i - \delta_i$, то отсюда ясно, что за счет выбора α всегда можно добиться того, что уравнение $\Phi(\lambda) = 0$ будет иметь по крайней мере k корней $\tilde{\lambda}_i$, $i = \overline{1, k}$, причем $\tilde{\lambda}_i \in (\lambda_{i-1} + \delta_{i-1}, \lambda_i - \delta_i)$, $i = \overline{1, k}$.

Основным результатом настоящего сообщения является следующая теорема.

Теорема 3. Пусть числа ε_1 , ε_3 , $\varepsilon_2 = \min_{x \in [0, h]} \varepsilon_2(x)$ удовлетворяют условию $\varepsilon_2 > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) > 0$ и существует целое число $k \geq 1$, что справедливо

$$\max(\varepsilon_1, \varepsilon_3) < \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_{k-1} < \lambda_k < \varepsilon_2.$$

Тогда существует число $\alpha_0 > 0$ такое, что для всякого $\alpha \leq \alpha_0$ существует по крайней мере k значений γ_i , $i = \overline{1, k}$, причем $\gamma_i \in (\sqrt{\lambda_{i-1}} + \delta_{i-1}, \sqrt{\lambda_i} - \delta_i)$, таких, что задача P имеет нетривиальное решение.

Доказательство. Функция Грина существует для всех $\gamma \in \Gamma$. Также ясно, что функция

$$A(\gamma) = \frac{2}{3 \|f(\gamma)\| \sqrt{3 \|N_0(\gamma)\|}}$$

является непрерывной функцией при $\gamma \in \Gamma$. Пусть $A_1 = \min_{\gamma \in \Gamma} A(\gamma)$ и пусть $\alpha < A_1^2$. В соответствии с теоремой 1 существует единственное решение $u = u(\gamma)$ уравнения (13) для всякого $\gamma \in \Gamma$. Это решение является непрерывной функцией и $\|u\| \leq r_* = r_*(\gamma)$. Пусть $r_{00} = \max_{\gamma \in \Gamma} r_*(\gamma)$. Оценивая $F(\lambda)$, получаем $|F(\lambda)| \leq Cr_{00}^3$.

Функция $g(\gamma)$ непрерывна и уравнение $g(\gamma) = 0$ имеет по крайней мере один корень $\tilde{\gamma}_i$ внутри отрезка Γ_i , $\sqrt{\lambda_{i-1}} + \delta_{i-1} < \tilde{\gamma}_i < \sqrt{\lambda_i} - \delta_i$. Обозначим $M_1 = \min_{0 \leq i \leq k-1} |Bg(\sqrt{\lambda_i} + \delta_i)|$, $M_2 = \min_{1 \leq i \leq k} |Bg(\sqrt{\lambda_i} - \delta_i)|$. Тогда величина $\tilde{M} = \min\{M_1, M_2\}$ положительна и не зависит от α .

Если $\alpha \leq \frac{\tilde{M}}{Cr_{00}^3}$, тогда

$$\left(Bg(\sqrt{\lambda_{i-1}} + \delta_{i-1}) - \alpha F(\sqrt{\lambda_{i-1}} + \delta_{i-1}) \right) \left(Bg(\sqrt{\lambda_i} - \delta_i) - \alpha F(\sqrt{\lambda_i} - \delta_i) \right) < 0.$$

Поскольку $Bg(\lambda) - \alpha F(\lambda)$ является непрерывной функцией, следовательно, уравнение $Bg(\lambda) - \alpha F(\lambda) = 0$ имеет корень γ_i внутри Γ_i , т.е.

$$\sqrt{\lambda_i} + \delta_i < \gamma_i < \sqrt{\lambda_{i+1}} - \delta_{i+1}. \text{ Мы можем выбрать } \alpha_0 = \min \left\{ A_1^2, \frac{\tilde{M}}{Cr_{00}^3} \right\}.$$

Из теоремы 3 следует, что при условиях, сформулированных выше, существуют осесимметричные распространяющиеся ТЕ-поляризованные волны без затухания в цилиндрических диэлектрических волноводах кругового сечения, заполненных немагнитной, изотропной неоднородной средой с нелинейностью, выраженной законом Керра. Этот результат обобщает известные соответствующие утверждения для диэлектрических волноводов круглого сечения с заполнением однородной нелинейной средой (при $\varepsilon_2 \equiv \text{const}$, $\alpha \neq 0$) [8, 15] и неоднородной линейной средой (при $\varepsilon_2 \neq \text{const}$, $\alpha = 0$) [16].

Различные приложения нелинейных волноведущих структур приведены в [17].

Список литературы

1. Стрэттон, Дж. А. Теория электромагнетизма / Дж. А. Стрэттон. – М. ; Л. : ГИТТЛ, 1948.
2. Eleonskii, P. N. Cylindrical Nonlinear Waveguides / P. N. Eleonskii, L. G. Ogan'es'yants, V. P. Silin // Soviet Physics JETP. – 1972. – Vol. 35, № 1. – P. 44–47.
3. Валовик, Д. В. О распространении ТМ-поляризованных электромагнитных волн в нелинейном слое с нелинейностью, выраженной законом Керра / Д. В. Валовик, Ю. Г. Смирнов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – Т. 48, № 12. – С. 2186–2194.
4. Валовик, Д. В. Задача о распространении электромагнитных ТМ-волн в слое с произвольной нелинейностью / Д. В. Валовик // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2011. – Т. 51, № 9. – С. 1729–1739.

5. **Валовик, Д. В.** Распространение электромагнитных ТЕ-волн в нелинейной среде с насыщением / Д. В. Валовик // Радиотехника и электроника. – 2011. – Т. 56, № 11. – С. 1329–1335.
6. **Валовик, Д. В.** Нелинейные эффекты в задаче о распространении электромагнитных ТМ-волн в слое с керровской нелинейностью / Д. В. Валовик, Ю. Г. Смирнов // Радиотехника и электроника. – 2011. – Т. 56, № 3. – С. 309–314.
7. **Валовик, Д. В.** Метод задачи Коши для решения нелинейной задачи сопряжения на собственные значения для ТМ-волн, распространяющихся в слое с произвольной нелинейностью / Д. В. Валовик, Е. В. Зарембо // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2013. – Т. 53, № 1. – С. 74–89.
8. **Валовик, Д. В.** Распространение электромагнитных ТЕ-волн в слое из нелинейного метаматериала / Д. В. Валовик // Радиотехника и электроника. – 2011. – Т. 56, № 5. – С. 589–599.
9. **Наймарк, М. А.** Линейные дифференциальные операторы / М. А. Наймарк. – М. : Наука, 1969. – 528 с.
10. **Stakgold, I.** Green's Functions and Boundary Value Problems / I. Stakgold. – Wiley, New York, 1979. – 638 с.
11. **Смирнов, Ю. Г.** Распространение электромагнитных волн в цилиндрических волноводах, заполненных нелинейной средой / Ю. Г. Смирнов, С. Н. Куприянова // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2004. – Т. 44, № 10. – С. 1850–1860.
12. **Smirnov, Yu. G.** Electromagnetic Wave Propagation in Nonlinear Layered Waveguide Structures / Yu. G. Smirnov, D. V. Valovik. – Penza : PSU Press, 2011.
13. **Треногин, В. А.** Функциональный анализ / В. А. Треногин. – М. : Наука, 1980. – 496 с.
14. **Лизоркин, П. И.** Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа / П. И. Лизоркин. – М. : Наука, 1981. – 384 с.
15. **Schürmann, H. W.** TE-polarized Waves Guided by a Lossless Nonlinear Three-layer Structure / H. W. Schürmann, V. S. Serov, Yu. V. Shestopalov // Phys. Rev. E. – 1998. – V. 58, № 1. – P. 1040–1050.
16. **Зильберглейт, А. С.** Спектральная теория регулярных волноводов / А. С. Зильберглейт, Ю. И. Копилевич. – Л. : ФТИ, 1983. – 302 с.
17. **Ахмедиев, Н. Н.** Солитоны. Нелинейные импульсы и пучки / Н. Н. Ахмедиев, А. Анкевич. – М. : Физматлит, 2003. – 299 с.

References

1. Stretton Dzh. A. *Teoriya elektromagnetizma* [Electromagnetic theory]. Moscow ; Leningrad: GITTL, 1948.
2. Eleonskii P. N., Oganess'yants L. G., Silin V. P. *Soviet Physics JETP*. 1972, vol. 35, no. 1, pp. 44–47.
3. Valovik D. V., Smirnov Yu. G. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Calculus mathematics and mathematical physics journal]. 2008, vol. 48, no. 12, pp. 2186–2194.
4. Valovik D. V. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Calculus mathematics and mathematical physics journal]. 2011, vol. 51, no. 9, pp. 1729–1739.
5. Valovik D. V. *Radiotekhnika i elektronika* [Radio engineering and electronics]. 2011, vol. 56, no. 11, pp. 1329–1335.
6. Valovik D. V., Smirnov Yu. G. *Radiotekhnika i elektronika* [Radio engineering and electronics]. 2011, vol. 56, no. 3, pp. 309–314.
7. Valovik D. V., Zarembo E. V. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Calculus mathematics and mathematical physics journal]. 2013, vol. 53, no. 1, pp. 74–89.

8. Valovik D. V. *Rasprostranenie Radiotekhnika i elektronika* [Calculus mathematics and mathematical physics journal]. 2011, vol. 56, no. 5, pp. 589–599.
9. Naymark M. A. *Lineynye differentsial'nye operatory* [Linear differential operators]. Moscow: Nauka, 1969, 528 p.
10. Stakgold I. *Green's Functions and Boundary Value Problems*. Wiley, New York, 1979, 638 p.
11. Smirnov Yu. G., Kupriyanova S. N. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Calculus mathematics and mathematical physics journal]. 2004, vol. 44, no. 10, pp. 1850–1860.
12. Smirnov Yu. G., Valovik D. V. *Electromagnetic Wave Propagation in Nonlinear Layered Wave-guide Structures*. Penza: PSU Press, 2011.
13. Trenogin V. A. *Funktsional'nyy analiz* [Functional analysis]. Moscow: Nauka, 1980, 496 p.
14. Lizorkin P. I. *Kurs differentsial'nykh i integral'nykh uravneniy s do-polnitel'nymi glavami analiza* [The course of differential and integral equations with additional chapters on analysis]. Moscow: Nauka, 1981, 384 p.
15. Schürmann H. W., Serov V. S., Shestopalov Yu. V. *Phys. Rev. E*. 1998, vol. 58, no. 1, pp. 1040–1050.
16. Zil'bergleyt A. S., Kopilevich Yu. I. *Spektral'naya teoriya regul'yarnykh volnovodov* [Spectral theory of linear waveguides]. Leningrad: FTI, 1983, 302 p.
17. Akhmediev N. N., Ankevich A. *Solitony. Nelineynye impul'sy i puchki* [Solitons. Non-linear impulses and beams]. Moscow: Fizmatlit, 2003, 299 p.

Валовик Дмитрий Викторович

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет (г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: dvalovik@mail.ru

Valovik Dmitriy Viktorovich

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor, sub-department
of mathematics and supercomputer
modeling, Penza State University
(Penza, 40 Krasnaya str.)

Маренникова Екатерина Алексеевна
аспирант, Пензенский государственный
университет (г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Marennikova Ekaterina Alekseevna

Postgraduate student, Penza State
University (Penza, 40 Krasnaya str.)

Смирнов Юрий Геннадьевич

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
математики и суперкомпьютерного
моделирования, Пензенский
государственный университет
(г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: mmm@pnzgu.ru

Smirnov Yuriy Gennad'evich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of sub-department
of mathematics and supercomputer
modeling, Penza State University
(Penza, 40 Krasnaya str.)

УДК 517.927, 517.968, 519.6

Валовик, Д. В.

Нелинейная задача сопряжения на собственные значения, описывающая распространение электромагнитных ТЕ-волн в плоском неоднородном нелинейном диэлектрическом волноводе / Д. В. Валовик, Е. А. Мареникова, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2013. – № 2 (26). – С. 50–63.